

Câteva principii didactice, uneori uitate

prof. Octavian Stănășilă

Până la 1800, Matematica și Fizica erau studiate împreună, sub titlul de Filozofie naturală. Ingineria era identificată cu construcția de drumuri și poduri și, abia după 1900, s-a vorbit de Inginerie mecanică, chimică, electrică, iar după 1950, de Telecomunicații și IT. Ca discipline de învățământ sau cercetare științifică, toate acestea sunt aparent separate, dar, laolaltă cu alte discipline, au un unic scop suprem, acela de a ne ajuta să putem supraviețui ca specie, într-un mediu tot mai ostil (iată, cutremure, vulcani, poluare, inundații, secetă sau lipsa hranei și a apei potabile...).

Mă adresez cititorilor ca beneficiari și chiar producători de matematică, dar și ca părinți sau bunici. Așa cum este predată pe toată verticala învățământului, Matematica este astăzi rejectată de mulți tineri, în aproape toate țările lumii, fiind privită ca o disciplină neînțeleasă, răufăcătoare, dacă nu chiar „toxică”. Nu discut despre alte materii, care au probabil aceeași soartă. Cauzele sunt mai multe și nu voi face cuiva vreun proces de intenție, ci numai câteva propuneri constructive. Așa cum cerea J. J. Rousseau, trebuie să ne reîntoarcem la natură! Iar speranța că tabletele și manualele digitale ar fi suficiente de la sine și că ele rezolvă totul în materie de comunicare cu elevii este deșartă.

În ultimele decenii, parcă ne aflăm tocmai într-o cursă contra naturii. În goana după premii nemeritate, vizite în străinătate, obținerea de granturi, contracte, confecționarea de lucrări științifice ISI, titluri de noblete acordate de ignobili și alte deșertăciuni, am uitat de menirea fundamentală a dascălilor – cea a comunicării cu tinerii, a asimilării reale de către aceștia a celor predate, ca și a dialogului sincer între generații. Cum s-a putut ajunge să avem elevi care nu știu să se exprime, care fac greșeli gramaticale, dovedind mari curențe de cultură elementară, studenți care nu știu să adune două fracții sau să prelucreze niște expresii algebrice, care n-au înțeles logaritmi sau trigonometria elementară, fără a mă referi la alte componente ale culturii? Ce să mai vorbim de rostul derivatelor sau integralelor! Au dispărut din consiliile profesionale de la licee sau facultăți, analizele de curs, discuțiile profesionale, vizitele colegiale, care constituiau de fapt un autocontrol intern subtil și fără costuri. Au dispărut seminariile la anii mari ai facultăților, înlocuite cu laboratoare care, de fapt, nu se țin... Mă opresc aici cu critica și autocritica.

Recent, acad. Solomon Marcus a decelat zece nevoi umane, un fel de principii educaționale generale, asociate cu cele zece porunci ale lui Moise: nevoia de a transmite tinerilor un sens al vieții, nevoia de evitare a rutinei, de stimulare a curiozității la tineri, efortul de a transmite esențialul domeniilor și a verifica asimilarea reală, nevoia de îndoială,

de cultură și nu în ultimul rând, nevoia de joc în predare și dialog, chiar cu riscul de a greși. Domnia-sa dă un exemplu frapant de greșeală creativă: „Teoria haosului” a început cu H. Poincaré, din încercările acestuia de a-și corecta erorile dintr-un articol publicat anterior de Mecanică cerească. Aduag un exemplu mai puțin cunoscut, al germanului Teichmüller, care într-un set de patru lucrări, avea ultimele două corectându-le pe primele două... Ceea ce nu i-a micșorat faima de cercetător inspirat și fecund, în comparație cu atâția producători de steril intelectual și maculatură.

Eu voi încerca să fiu ceva mai aplicat și aplecat spre Matematică. Am scris de curând o carte – „Resurse matematice și informatice”, apărută la Editura Niculescu, cu subtitlul „Fals tratat de didactică matematică”, pastişându-l pe Alexandru Odobescu. Printre altele, am urmărit câteva principii didactice, pe care le sintetizez mai jos și care pot fi utile celor care predau matematica la gimnaziu, liceu sau facultate, ca și celor destul de mulți, care au de-a face cu matematica, prin profesie sau simplă pasiune. Se va vedea influența pe care a avut-o asupra mea mediul ingineresc în care am lucrat de peste 50 de ani.

I. Există un număr redus de obiecte matematice esențiale, care trebuie explicate elevilor începând din clasa a VII-a de gimnaziu; acestea sunt: numerele, seturile de numere, funcțiile și configurațiile geometrice. Și atât... Așadar, Matematica nu este chiar nemărginită Teama de nemărginire este înhibitoare pentru orice om, indiferent de vârstă.

O întrebare tipică, pe care am testat-o chiar la studenții facultăților de Automatică și Electronică: ce sunt numerele? Mulți tăceau, iar răspunsul pe care îl așteptam era acela că numerele sunt obiecte matematice, cu care se pot face diverse operații – adunări, înmulțiri, puteri, radicali, care sunt supuse unor anumite relații (de inegalitate, de divizibilitate), acolo unde operațiile și relațiile respective au sens. Matematicienii au introdus ideea de noțiune primară, care nu mai trebuie definită și este luată ca atare, cu înțelesul din limbajul uzual. În acest mod, ei au evitat lanțul interminabil de întrebări de tipul: „dar aia ce este?”. Ca atare, termenii „mulțime”, „element”, „operație”, „relație”, „obiect esențial” etc. nu trebuie definiți; altminteri, ei ar trebui definiți folosind termeni anterior acceptați! Ideea a început să fie preluată și de dascălii altor discipline. Lărgirea claselor de numere este un excelent prilej pentru profesori de a urmări evoluția gândirii umane; de exemplu, numărul 0 (zero) și numerele întregi negative au fost descoperite abia în Evul Mediu, iar numerele complexe, abia după anul 1600. Numerele reale se numesc așa, deoarece sunt măsuri ale unor mărimi din realitatea înconjurătoare. Nu mai spun cât rău a produs introducerea termenului de „imaginar” în mintea neprofesioniștilor.

Perechile sau tripletele de numere sunt mai dificil de înțeles. Profesorii trebuie să înceapă cu exemple firești. De exemplu, dacă o bilă nu intră într-o gaură, aceasta este o proprietate a perechii (bilă, gaură), nu o vină a bilei că este prea mare sau a găurii că este prea mică; similar, faptul că 15 este divizibil cu 3 sau că $3 < 15$ este o proprietate a perechii (15,3), iar istoria culturii se referă la perechile (om, operă) etc. De îndată ce s-au înțeles seturile de numere, adică perechi, triplete, cvadrupele etc. și regulile de joc – egalitate, sumă pe componente etc., câștigul este imens. Polinoamele, vectorii, matricile, adică o bună parte din algebră sunt în esență tocmai seturi de numere!

În predarea geometriei plane, trebuie lămurite bine, începând din clasa a VI-a, configurațiile simple: segment (perechea capetelor lui), deci segmentul diferă de măsura (lungimea) lui, considerată în raport cu o anumită unitate de măsură; similar, unghiul (figura formată de două semidrepte având un capăt comun) diferă de măsura lui. De exemplu, o mediană este, în funcție de context, semidreaptă sau lungime. Am constatat că mulți studenți nu știu ce înseamnă 1° sau 1 radian și nu știu cum s-a ales numărul 360 (pentru că are mulți divizori!); iar la întrebarea: „în ce se măsoară sinusul unui unghi”, răspund că în radiani (și nu că este adimensional). Legat de geometria în spațiu, m-a impresionat faptul că în Japonia, China, Coreea ș.a., elevii din ciclul primar au ore de olărit, cu două scopuri: să nu se jeneze de prelucrarea lutului și să-și educe „inteligența mâinilor”, care le permite să vadă bine în spațiu.

De asemenea, profesorii trebuie să lămurească, prin jocuri și exemple, faptul că obiectele matematice esențiale reflectă tocmai principalele activități umane: grupările de elemente au condus la mulțimi, iar o selectare la submulțimi, în timp ce contemplarea și măsurarea au condus la diverse configurații geometrice; mișcările sistematice - translații, rotații, omotetii, au sugerat transformările geometrice; iar estimările și predicțiile au premers calculele aproximative și probabilitățile etc. Compararea grupărilor a condus la cardinale și așa au apărut numerele naturale 1, 2, 3 ... La întrebarea „de ce li se spune numere naturale” sau „de ce 1 nu este număr prim?”, prea puțini cunosc răspunsul: „sunt singurele care apar în natură” (3 copaci, 5 elevi și nu 3,2 copaci, 5,4 elevi sau 7,3 case ...); dacă 1 ar fi prim, s-ar viola teorema fundamentală a aritmeticii, anume că orice număr natural are o descompunere unică în factori primi, până la ordinea factorilor!

În clasa I, s-a constatat o confuzie dureroasă în mintea copiilor; anume ei nu pot face distincție între concept și simbol. Când vorbim, de exemplu, despre numărul 5, există patru accepțiuni (înțelesuri) distincte între noțiunea abstrasă din corespondența cu cele 5 degete ale mâinii, simbolul/notația 5, semnificația sunetului „cinci” și ordinalul „al cincilea”! Mulți copii le confundă și înțeleg că în suma $5+2$, trebuie să opereze asupra simbolurilor. Era bună

socoteala pe degete! Trecerea peste 10 pune, de asemenea, mari probleme. Nu mai vorbesc de tabla înmulțirii și mai târziu, de operațiile cu fracții sau introducerea numerelor raționale – alt supliciu. Un fapt ce trebuie repede înțeles, deoarece este crucial, este acela că simplificarea cu 0 este interzisă; altminteri, din faptul că $2 \times 0 = 3 \times 0$ s-ar deduce că $2=3$.

Totdeauna, când din ceva adevărat se obține ceva fals, operația respectivă este interzisă. În fine, împărțirea cu 0 nu este permisă, deci scriind a/b , se subînțelege că $b \neq 0$. Dacă astfel de reguli de igienă matematică nu sunt lămurite elevului, el devine o victimă nefericită până dincolo de Bacalaureat și un viitor tată nefericit. Așa începe scârba pentru matematică și crearea unor mase de elevi complexați, nelămuriți cu obiectele de bază și trecuți prin anii de gimnaziu sau liceu, cu pecetea de contravenienți.

Unii prezintă ca o virtute inapetența lor pentru matematică, ascunzând de fapt o fractură în educația sau instrucția proprie. Repetenția la clasele a VI-a sau a X-a nu trebuie privită ca o rușine sau ca un balast financiar pentru familie sau societate, ci mai degrabă ca o șansă de coacere la minte și reintegrare cu capul sus. Ce nu învață Ionică, nu mai învață Ion! Istoria arată că mulți foști repetenți au ajuns „pe bune” persoane onorabile, fără cazier profesional. Așa cum am mai spus, tabletele și manualele digitale, prezentate ca salvatoare și ca înlocuitoare ale gândirii și înțelegerii de fond, nu îi vor ajuta prea mult pe copii, în lipsa unor instructori avizați.

II. Iată un al doilea vechi principiu didactic: „de la simplu la complex și invers”.

Descartes vorbea de metoda descompunerii dificultăților în secvențe separate, bine formulate și articulate, metodă aplicată în orice domeniu al cunoașterii. Nu poți trece la geometrie în spațiu fără geometrie plană sau la algebră fără aritmetică înțeleasă, iar construcția matematică are mai multe etaje, a căror urcare nu poate fi făcută cu liftul. Orice text se descompune în fraze, frazele în propoziții, propozițiile în cuvinte, apoi silabe, litere, foneme. În mod similar, o formă complexă (de exemplu o scenă) se descompune în subforme, subsubforme, obiecte relaționate etc. și aceasta este ideea de bază a Teoria Recunoașterii Formelor. Tot astfel, nu uităm că lumina se descompune în cele 7 culori fundamentale. În trecut fie zis, întrebând studenți din anul I, de unde provine denumirea de „coordonate carteziene”, nu toți au știut răspunsul: anume de la Cartezius, numele latinizat al lui Descartes.

Iar Fourier a asociat oricărui semnal periodic (de exemplu, unei vibrații periodice) șirul coeficienților Fourier (produs scalar dat definit de integrala pe un interval de lungime cât perioada), cu recuperarea semnalului de îndată ce se cunosc coeficienții. Aceștia formează un set de numere complexe – un obiect matematic tipic discret (deoarece indicii n sunt luați pe sărite...). Așa a început conversia continuu/discret sau, mai pompos, analogic–

digital și tocmai așa s-a intrat în „era digitală”. Atunci când le-am explicat studenților că muzica electronică și sintetizatoarele folosesc în fond aparatul Fourier, ascuns în diverse dispozitive ingineresti, ei au învățat seriile Fourier de...rușine. De altfel, rușinea și frica sunt două din elementele esențiale ale conștiinței sociale! În ultimul timp, s-au impus alte descompuneri – în armonici, în voci multidimensionale și s-a unificat studiul cuvintelor și imaginilor, din considerații de tip analogic/digital, precum Teoria undinelor. De asemenea, s-a realizat adâncirea analizei entităților discrete și continue, cu considerarea celor infinitezimale/cuantice, cărora nu le putem intui forța de penetrare în conștiința matematică.

În aceeași ordine de idei, am constatat că multe probleme, nu doar de matematică, leagă date accesibile măsurătorilor directe cu unele inaccesibile, legătura rezultând din unele legi sau formule teoretice. Atunci când am interpretat formula lui Gauss „flux – divergență” (care leagă mărimi cunoscute pe o suprafață închisă de alte mărimi referitoare la volum) sau formula integrală Cauchy, ca o relație între elemente accesibile măsurătorilor directe și altele inaccesibile, am avut o revelație de dascăl: studenții făceau un efort de înțelegere și chiar un exercițiu de admirație.

III. Alt principiu este cel al unificării, al găsirii de corelări între diversele noțiuni.

Matematica a realizat prima mare unificare, între Algebra clasică și Geometria analitică; vectorii apar ca seturi 2D sau 3D de numere reale. Punctele au coordonate; dreptele, curbele, suprafețele au ecuații și regiunile au inecuații... S-a realizat astfel programarea geometriei și rezolvarea de probleme geometrice prin calcul algebric. Apoi Analiza matematică a făcut corp comun cu Geometria diferențială a curbelor, suprafețelor și varietăților. S-au lămurit conceptele de contact, tangență, curbura, torsiune, tensori, spinori, care au pregătit terenul pentru Teoria relativității. Astfel de exemple pot fi utilizate în predare, deoarece oferă ocazia unor priviri de ansamblu asupra celor învățate și impun respect pentru munca atâtor cercetători anonimi, care completează detaliile teoriilor respective, adăugând diverse aplicații. Astfel, după ce Newton a pus bazele Mecanicii teoretice, au fost inventate cele mai subtile mașini și mecanisme, care au ușurat munca oamenilor; Carnot a declanșat studiul mașinilor termice (pregătind inventarea automobilelor), iar Faraday – studiul mașinilor electrice, care au creat în timp multe locuri de muncă, dar și mândrie pentru geniul uman.

Există și alte unificări mai subtile. Astfel, HARD-ul și SOFT-ul sunt aspecte ale aceleiași realități. Orice soft bun se poate acum „traduce” și materializa într-un hard bun și invers, un hard ingenios va găsi corespondentul într-un program. Goethe spunea că „Arhitectura este muzică înghețată”. Tot astfel, ”Informatica este matematică lichefiată”! Iar

Fizica modernă urmărește de câteva decenii, în mod impresionant și implicând mai multe generații de „Nobel”-iști, unificarea tuturor tipurilor de forțe din Univers.

Astfel de unificări s-au realizat și în alte științe, constituind un element al logicii de dezvoltare a acestora. Matematica are și aici ceva specific: nu și-a renegat achizițiile anterioare, ceea ce a contribuit la nevoia de sistematizare, regândire a conceptelor de bază, cu sublinierea esențialului și eliminarea sterilului intelectual.

IV. Mă refer la încă un principiu didactic fundamental – cel al utilizării euristicii în predare.

Cunoșteam lucrarea mai veche a lui G. Polya – „Matematica și raționamentele plauzibile” și am avut un imbold în abordarea acestui principiu din partea profesorului Ioan Dumitrache, care mi-a împrumutat o carte de Euristică în Inginerie; eu nu eram pregătit pentru dezvoltarea acestui subiect și cred că ar merita realizarea unei sistematizări a diverselor procedee inovative, ca și o înțelegere a mecanismelor care i-au condus pe marii gânditori, savanți, inventatori sau inovatori la finalizări într-un domeniu sau altul. Cursurile noastre se reduc adeseori la prezentări liniare, lipsite de emoție și suspans, a unor adevăruri teoretice, stabilite parcă de persoane care nu aveau îndoieli, neclarități sau chiar suspiciuni asupra celor prezentate.

Mărturisesc că am fost impresionat de soluția genială dată de Arhimede pentru a deduce volumul sferei, prin utilizarea echilibrului solidelor, ca și de justificarea principiului din hidrostatică ce îi poartă peste timpuri numele. Merită de amintit spusa lui Grigore Moisil: „să ne gândim ce s-ar fi întâmplat dacă tiranul l-ar fi forțat pe Arhimede să facă cel mult duș și nu l-ar fi lăsat totuși să stea în cadă!”

De asemenea, nu mai puțin impresionat am fost de împletirea intuiției și gândirii prin care Galilei a dedus, prin experiment repetat, folosind un ceas și o bilă lansată pe un plan înclinat (cu un unghi de măsură α , $0 < \alpha < \pi/2$) și cu frecare minimă, că raportul s/t^2 este constant. După care a avut ideea de a face pe α să tindă spre $\pi/2$ și să deducă celebra lui formulă a căderii libere $s=gt^2/2$. Tot prin euristică și sinteză, el a dedus și formula perioadei oscilațiilor unui pendul. Timp de 2000 de ani, se credea că în mișcarea rectilinie, forța este proporțională cu viteza și Newton a stabilit legea a II-a a dinamicii, extinzând conceptul de accelerație introdus de Galilei, în cazul gravitației, dar nu ca derivată secundă a drumului parcurs, ci euristic.

În fine, m-am simțit foarte reconfortat atunci când am înțeles ce a putut face Hertz din cunoașterea ecuațiilor Maxwell-Faraday ale câmpului electromagnetic, pe care le-a altoit cu inventarea circuitului oscilant L-C, generând apoi pe Pământ unde electromagnetice. După câțiva ani s-a deschis era comunicațiilor radio, a telegrafului electric, telefoniei,

inventării curentului alternativ, televiziunii etc. În orice caz, prin realizările ultimului secol, Electronica a schimbat fața lumii! Asemenea digresiuni își pot găsi locul și în cursurile de matematică, fie și pentru faptul că ecuația diferențială a circuitului L-C poate fi obiect de studiu matematic spectaculos .

V. Ca un ultim principiu didactic la care mă refer, este cel al prezentării evoluției istorice a unor concepte și a unor scurte biografii științifice.

Fără a pierde mult timp, renunțând la lecții, eventual la detaliile unor demonstrații, merită amintit *en passant* că, de exemplu, forța aburului era cunoscută anticilor, ca și oglinzile sferice, că progresele au apărut în papirusuri egiptene, iar integralele definite au apărut la Arhimede cu 2000 de ani înainte de apariția derivatelor, fiind calculate pe baza „lemei cleștelui”. În general, dezvoltarea științei nu are caracter liniar, ci unul sinuos, iar Matematica și-a regândit mereu conceptele, dovedind că fiecare generație are ceva de făcut. După introducerea noțiunii de grup, Geometria a început să fie altfel înțeleasă și nimeni nu credea că Geometriile neeuclidiene sunt esențiale pentru Fizica modernă, ca și în proiectarea GPS-ului. Dezvoltarea Analizei matematice a fost impulsionată de succesele mașinilor mecanice și termice, iar introducerea noțiunilor de viteză, accelerație, impuls, energie, lucru, mișcare pe curbe sau suprafețe etc. are cauze multiple și, prin excelență, interdisciplinare.

Afirmam nevoia de a apela în lecțiile noastre la momente biografice semnificative. De exemplu, puțini știu că francezul Clairaut a devenit academician la 18 ani și că el a descoperit integralele curbilini și a studiat deplasarea corpurilor în medii vâscoase. Un episod puțin cunoscut este cel petrecut între Newton, ușor supărat că i-a „scăpat” formula lui Taylor; aceasta aproximează orice funcție netedă printr-un polinom și a stat la baza alcătuirii tabelelor de valori ale logaritmilor și funcțiilor trigonometrice care au ajutat Anglia să devină o mare putere maritimă. Ca o ciudățenie a istoriei și o revanșă a lui Taylor peste timp, aceeași formulă este folosită astăzi în SOFT-ul calculatoarelor moderne și în HARD-ul corespunzător, prin cablarea arborilor operaționali. Despre Fourier sau Heaviside, există o întreagă literatură privind eroismul în promovarea științei, în lupta nu numai cu dificultățile inerente cercetărilor, dar și cu invidiile ascunse. Chiar și aici, matematicienii și nu numai s-au dovedit neîntrecuți ! Fiind acuzat că nu este riguros, Heaviside a răspuns: „ Să nu mai mâncăm, deoarece nu stăpânim toate legile digestiei?”. Nu mai vorbesc de disputa dintre Tesla și Edison, ca și de frustrarea lui Tesla atunci când un asistent al lui, pe nume Marconi, i-a „suflet” secretul radio-ului și a fost împrăștiat cu Nobelul. Recunoașterile post-mortem sunt platonice și neoperaționale...

Poate fi de asemenea util să amintim, chiar și în trecut, curiozități și fenomene matematice, foarte apreciate de studenți: curbe care umplu un pătrat sau un cub, fenomenele Gibbs sau Runge, fractalii, haosul sau constructivismul lui Bejan.

Călătoria continuă și trebuie să credem, așa cum ne spune Xenofon, că „zeii nu ne-au dezvăluit chiar totul”.