Seminar „ Floarea Darurilor ”

1. MARILE UNIFICĂRI ALE MATEMATICII

prof. O. Stănășilă – 7 oct. 2016

1. Matematica și alte științe

În grecește, „mathema” înseamnă studiu, învățare. De peste 2500 de ani, sursele dezvoltării matematicii au fost mereu aceleași :

– surse externe, care țin de prezența oamenilor într-un mediu ostil, care ne obligă în ultimă analiză la reguli care ne învață „să supraviețuim”; pe scurt, MATEMATICA LUMII.

Exemple. Inundațiile anuale de la Nil și refacerea proprietăților au condus la primele formule geometrice privind arii, configurații etc. Mai recent, implicarea matematicienilor în realizarea rețelei INTERNET, a sistemului GPS sau în descifrarea codului genetic.

– surse interne (curiozitate, rezolvare de probleme, competiții...); pe scurt, LUMEA MATEMATICII.

Exemple. Legat de șirul infinit crescător al numerelor prime $p_1 < p_2 < \cdots < p_n < p_{n+1} < \ldots$ („cărămizile” aritmeticii și algebrei), iată trei probleme (≡ conjecturi cu șanse să devină teoreme) :

– Goldbach: orice număr natural par $a \geq 4$ este suma a două numere prime;

– D. Andrica: pentru orice $n \geq 1$, $\sqrt{p_{n+1}} - \sqrt{p_n} < 1$;

– în șirul anterior, există progresii aritmetice finite de orice lungime (ex. 3, 5, 7 ; 11, 17, 23, 29 ; 5, 17, 29, 41, 53 etc.).

Problema lui Goldbach este nerezolvată de 300 de ani și problema profesorului Andrica de la Univ. Cluj-Napoca au fost testate pentru primele miliarde de valori, dar soluția definitivă nu există încă. Cea de-a treia a fost recent rezolvată de profesorul chino-australiano-american Terence Tao.

Astfel de probleme pot fi interpretate ca încurajând „vocația inutilului”, dar și ca motor al dezvoltării matematicii, care au condus la crearea (descoperire / invenție) a multor obiecte de studiu interesante în sine, dar și ca instrumente de lucru sau atac pentru alte probleme.

Pe la 1600, G. Galilei spunea: „Cartea naturii este scrisă în simboluri matematice” și după 500 de ani, Sir R. Penrose afirma că „Înțelegerea Universului decurge din câteva principii matematice!”.

Există uneori o percepție falsă, cum că matematicienii nu se implică. Fără să intru în detalii, să ne amintim contribuțiile lui Arhimede (unul din cei mai mari geometri și ingineri ai lumii), Galilei, Newton, Fourier („descompunerea semnalelor periodice în oscilații armonice”), Gauss („telegraful electric”, „măsurarea meridianului pământesc”), Hertz („generarea controlată de unde electromagnetice”), Kolmogorov (realizarea „Katiușei”). Turing (decodificarea mesajelor „Enigmei”), John von Neumann (bazele matematice ale Mecanicii cuantice, arhitectura computerelor secvențiale unde datele și instrucțiunile sunt prelucrate introduse în același program). Din fericire, rolul matematicii este recunoscut de cine trebuie ...

Spre deosebire de alte științe, <u>matematica nu și-a renegat achizițiile</u>. Din acest motiv, ea apare stufoasă, cuprinzând sute de teoreme din toate timpurile (Pitagora, formulele trigonometrice, logaritmii, derivatele, Leibniz – Newton, teoremele lui Cauchy, etc. etc.). Pentru elevi și studenți, ea apare ca un fluviu de formule, definiții, enunțuri, care o fac dificilă și imposibil de învățat „pe sărite”. Dar în timp, s-a găsit și aici un răspuns ...

2. <u>Ce este totuși matematica ?</u>

Răspunsul standard : un ansamblu de concepte, modele pentru cantități / mărimi, configurații și structuri complexe, împreună cu reguli de transformare a acestora, respectând principiile logicii aristotelice. Desigur, un răspuns pompos care ar trebui măcar comentat.

Un prim fapt, importatissim pentru comunicarea matematicii la diverse niveluri - gimnaziu, liceu, facultate - , este următorul :

OBIECTELE MATEMATICE ESENȚIALE SUNT RELATIV PUȚINE !

Acestea sunt :

<u>Numerele</u>, <u>Seturile de numere</u> (perechi, triplete, 4–uple etc.), <u>Funcțiile</u> $f : A \to B$ (privite ca sisteme intrare / ieșire $A \to \boxed{f} \to B$), <u>configurațiile geometrice</u> și <u>spațiile</u> (ca mulțimi structurate, înzestrate cu structuri algebrice, topologice sau de ordine). Restul de obiecte matematice sunt ... derivate.

<u>Întrebare (dură !)</u>: ce sunt numerele și de ce 1, 2, 3, ... sunt numite numere naturale ?

<u>Un răspuns</u> : Numerele sunt obiecte matematice cu care se pot efectua anumite operații (cu etichetele „ + ”, „ . ” etc.) și satisfăcând anumite relații „ $\leq$ ”, „ = ”, „ ⋮ ” etc.).

Numerele naturale sunt singurele întâlnite în natură : 5 pomi, 3 elevi, 10 case și nu 3,7 pomi sau $\sqrt{7}$ case.

Alte întrebări dure : ce sunt mulțimile, evenimentele, elementele, relațiile, obiectele etc. Răspunsul : noțiuni primare, care nu trebuie definite ! Ele trebuie considerate cu înțelesul din limba maternă. Totdeauna când introducem o definiție, apelăm la termeni deja definiți și mereu putem întreba : „aia ce e ?" și nu se mai termină. Matematicienii au mai introdus ceva; anume, încep diverse prezentări cu „fie" sau cu „avem" ! Am întâlnit studenți și nu numai care declarau ingenuu : „știu. dar nu știu cum să încep" !

Se poate spune că istoria omenirii coincide cu evoluția conceptelor de număr și funcție. Să se gândim puțin la șirul de incluziuni : $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C} \subset \mathbb{H}$ ... Ne oprim puțin la numărul 0 (zero); el a fost considerat natural după 1970 și a fost descoperit în Evul Mediu. Actualmente, fiecare mulțime structurată (de exemplu, orice spațiu vectorial) își are zeroul propriu; matricea nulă, polinomul nul, bitul 0, cuvântul vid, evenimentul imposibil etc sunt obiecte-nulități diferite.

Glumă matematică : Deviza nulităților este că dacă li se pune pe unul (1) în față, ele formează milioanele sau miliardele : 10...0 .

Lărgirea noțiunii de număr este legată de rezolvarea ecuațiilor; de exemplu, dacă $a, b \in \mathbb{N}$, atunci ecuația $a + x = b$ nu poate fi rezolvată în $\mathbb{N}$ (dar se poate în $\mathbb{Z}$); similar, trecerea de la $\mathbb{Z}$ la $\mathbb{Q}$ este impusă de rezolvarea ecuațiilor $ax = b$ cu $a, b \in \mathbb{Z}$, $a \neq 0$, iar trecerea de la $\mathbb{Q}$ la $\mathbb{R}$ – legată de ecuații precum $x^2 = 2$ etc. De exemplu, nu se pot împărți două paie la trei măgari în $\mathbb{Z}$.

Funcțiile au apărut din nevoia de modelare a dependențelor unor mărimi nu neapărat matematice ...

Întrebare : Cum să modelăm matematic următoarea afirmație cotidiană : „starea mea de spirit este funcție de starea vremii " ?

Răspuns : Fie A mulțimea stărilor vremii (senin, plouă, frig, vânt,...) și B mulțimea stărilor mele psihice (trist, vesel, distrat...). Fiecărui element $x \in A$ îi corespunde un unic element $y \in B$. Așadar, am definit $f : A \to B, x \mapsto y$ ... Dacă $A, B \subset \mathbb{R}$, atunci se obțin funcții reale $f : A \to B$, apoi graficele $G_f \subset \mathbb{R}^2$ etc.

Încă două cuvinte despre seturi de numere. Faptul că $15 \vdots 5$ este o proprietate a perechii (15, 5); în mod similar, faptul că o bilă B nu intră într-o gaură G este o proprietate a perechii (B, G) și nu o vină a bilei, după cum la scriitori, trebuie luată în seamă perechea om / operă etc. Dar dăm un exemplu ceva mai complex. În economia socialistă, pentru fiecare produs, se considerau <u>separat</u> axa Op („cât se produce”) și axa Ov („cât se vinde”), într-o anumită perioadă. Ne amintim de un anume Stahanov sau de poemele dedicate stocurilor ca scop...Dar capitaliștii considerau de mult perechile (p, v); evident $p > 0$, $v > 0$ și $v < p$. Atunci dinamica în timp este legată de evoluția perechilor (p, v) pe diverse curbe etc.

Mai mult, elementele mulțimii $\mathbb{R}^n$ sunt seturi ordonate de n numere reale, iar vectorii din plan sau spațiu pot fi asimilați cu seturi de numere reale (2D sau 3D); similar, o matrice $m \times n$ cu coeficienți reali este de fapt un set $(a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{mn}) \in \mathbb{R}^{mn}$. Iar un polinom de grad n este un set de $n + 1$ numere; de exemplu, $2X^2 - 3X + 7$ este setul (7, –3, 2, 0, ...)

$\boxed{\text{ORICE CAPITOL DE MATEMATICĂ (FIZICĂ, CHIMIE, ECONOMIE etc)}}$

$\boxed{\text{ÎȘI ARE CADRUL NUMERIC SPECIFIC}}$

<u>Întrebare</u> : De unde provine denumirea de numere reale ?

<u>Răspuns</u> : Sunt măsuri ale unor mărimi din realitate - m, kg, s, dobânzi, temperaturi, densități - etc. Definiția matematică riguroasă nu este prea practicabilă .

<u>Exemple</u>. Analiza matematică și Geometria analitică au cadrul numeric $\mathbb{R}$ (nu se derivează șirurile !). Ecuațiile algebrice polinomiale se rezolvă în $\mathbb{C}$. Inecuațiile, ecuațiile trigonometrice sau logaritmice se rezolvă în $\mathbb{R}$. Combinatorica se dezvoltă în $\mathbb{N}$ (astfel, C_n^k au sens pentru $n, k \in \mathbb{N}$ și $n \geq k$). Formula binomului lui Newton $(a + b)^n$ are sens dacă $a, b \in \mathbb{C}$, și $n \geq 1$ întreg. Iar dacă $\sin x = 0$, atunci $x = k\pi$ cu $k \in \mathbb{Z}$ (nu $k = \frac{1}{3}$). În economie, dobânzile au sens în $\mathbb{Q}_+$ (este exclusă o dobândă de π EURO).

Ca o curiozitate, cea mai simplă mulțime de numere (anume $\mathbb{N}$) a fost axiomatizată ultima, de către Peano în 1901. Tot el a sugerat conceptul de algoritm ca o procedură care la inițiere (la momentul 0) necesită datele de intrare și la fiecare moment k trebuie precizată starea algoritmului la momentul succesiv $k + 1$ etc. Iar principiul inducției matematice se poate explica simplu, considerând o scară la care trebuie urcată prima treaptă și apoi demonstrezi că dacă ai urcat treapta generică k, atunci o poți urca și pe a $(k + 1)$ – a.

<u>Întrebare</u> : De unde provine termenul „algoritm” ?

<u>Răspuns</u> : Ca și „algebra”, la bază se află numele unui mare matematician arab Al Horezmi ($\cong$ 900 d. Chr.).

<u>Notă</u>. Nu mai dezvoltăm evoluția altor obiecte esențiale ale matematicii. Să reținem că toate reflectă principalele activități umane (grupări și selectare – mulțimi și submulțimi, contemplare – configurațiile geometrice, mișcările – transformări, dependențele –

funcțiile și dorința de sintetizare – spațiile etc.). S-ar putea spune că ele sunt descoperite și doar parțial inventate.

3. <u>Unificările promise</u>

Separarea matematicii pe capitole s-a realizat în timp, din rațiuni didactice sau organizatorice. Este însă utilă și operația inversă de privire în ansamblu, de corelare a conceptelor și de grupare a celor similare în esență. Așa s-a ajuns la termenul de „izomorfism” și la abordarea diverselor probleme din mai multe puncte de vedere.

<u>Exemplu</u>. După caz, numerele reale pot fi privite ca fracții zecimale (infinite) sau ca puncte ale unei axe. Multe probleme matematice, fizice, chimice, economice au interpretări geometrice care le fac mai ușor de formulat și apte de argumente imbatabile (de tipul : voilà).

Modelul (nu moda !) unificărilor l-a dat Fizica secolului 20, din elucidarea naturii comune a diverselor tipuri de interacție din Univers. Matematica și-a propus scopuri mai modeste.

I. <u>ALGEBRA vs. GEOMETRIA</u> a fost prima mare unificare .

Momentul crucial l-a constituit descoperirea Geometriei analitice (Descartes, 1619). În mod tacit, termenul „analitic” este asimilat cu cel de „calcul”. Așadar, facem geometrie prin calcule algebrice corespunzătoare. În cazul 1D, prin axă se înțelege orice dreaptă pe care se fixează convențional 0, 1, ∞. Atunci punctele sunt asimilate cu numere reale. Apoi în cazul 2D se fixează un reper ortonormal *xOy* și punctele sunt identificate cu perechi de numere reale etc. Atunci s-a declanșat secolul Geometriei analitice și al Mecanicii raționale (curbe, suprafețe, traiectorii, legile lui Newton, forțe, viteze, accelerații, care ascundeau un concept unificator pentru multe alte situații , anume cel de câmp de vectori etc.) și s-a dezvoltat dicționarul geometrico – algebric (figurile geometrice au ecuații, regiunile au inecuații, intersecțiile revin la sisteme de ecuații etc). După 1850 a început studiul Geometriei n – dimensionale, al algebrei spațiilor $\mathbb{R}^n$ (Riemann, Hamilton, Gibbs etc.).

<u>Întrebare</u> : De unde provine termenul „coordonate carteziene” ?

<u>Răspuns</u> : Cartesius era numele latinesc al lui Descartes. Noțiunea de coordonată nu este primară și este legată de conceptele de „dimensiune”, „parametri de stare”, poziționare relativ la un reper etc. Știați că Descartes a vizitat Transilvania în 1621 ?

Sophie Germain a găsit o formulă sugestivă : „Algebra a devenit Geometrie scrisă în simboluri, iar Geometria – Algebră încarnată în figuri”.

Încercări de apropiere a celor două Capitole de matematică au existat încă din anii 1500 când Viète a introdus terminologia modernă ($a^2 \equiv$ „a pătrat”; $a^3 \equiv$ „a cub” etc.), inclusiv etichetele +, - , . : <, >, etc, ale diverselor operații. Cu terminologia de astăzi, Geometria analitică se poate redenumi ca „Programarea pe calculator” a Geometriei, prefațând unificarea MATEMATICA vs. INFORMATICA, aceasta având multe alte aspecte.

II. GEOMETRIA vs. ANALIZA MATEMATICĂ

Alt moment crucial : descoperirea derivatelor (atribuită deopotrivă lui Leibniz și Newton). De aici au decurs noțiunile fundamentale de viteză, accelerație, tangentă la o curbă, plan tangemt la o suprafață, curbură, torsiune, varietăți diferențiabile și mai târziu, de rată a profitului, rată a dobânzii, diferite intensități etc, toate fiind derivate (dar nu deduse, rezultate ci definite ca niște limite). După 1750 s-a dezvoltat studiul ecuațiilor diferențiale și ecuațiilor fizicii matematice (EDP). Pe scurt :

FIZICA A DEVENIT ȘTIINȚĂ SEPARATĂ

Până atunci, Fizica, Chimia, Biologia și chiar Matematica erau contopite în cadrul Filozofiei naturale. Iată câteva momente semnificative pentru dezvoltarea Analizei matematice :

- Apariția primului manual de Analiză din istorie, atribuit baronului l'Hopital, pe baza lecțiilor care i-au fost predate contracost de J. Bernoulli.

- Formula lui Taylor, formulă care a permis elaborarea tabelelor trigonometrice și logaritmice, pe baza cărora navele engleze au câștigat competiția cu spaniolii sau portughezii în stăpânirea mărilor;

- Problema brahistocronei pusă de Jacob Bernoulli : „dintre toate curbele care unesc două puncte nesituate pe aceeași verticală, care este cea pentru care un mobil lansat de sus (omițând frecarea) ajunge jos în timp minim” ? Răspunsul l-a dat Euler după mult timp, anume cicloida. Pistele de bob sau săniuș sunt acum proiectate folosind arce concatenate de cicloide... Această „problemă nevinovată” a declanșat Calculul variațional (ecuațiile Euler – Lagrange) și relativ recent, Controlul optimal studiat în toate facultățile de inginerie.

- Studiul seriilor Fourier, al transformărilor integrale și recent al undinelor („wavelets”) sunt alte momente cruciale în dezvoltarea Analizei matematice.

- Apariția „jocului cu infinitul” : ce se poate spune despre seria 1 – 1 + 1 – 1 +... ? Punând parantezele (1 – 1) + (1 – 1) + ... , îi asociem suma 0; dar scriind 1 – (1 – 1) – – (1 – 1) – ... îi asociem suma 1. Apoi, avem formula $1+x+x^2+\ldots=\frac{1}{1-x}$ pentru $|x|<1$ și făcând $x \rightarrow -1$, rezultă 1 – 1 + 1 – 1 + ... $=\frac{1}{2}$. Ce este de făcut ? Abia după 1830, Cauchy și Abel au introdus conceptul de serie convergentă („sumele parțiale formează un șir având o limită finită”), decizând două lucruri : seria anterioară este divergentă; iar jocul cu serii diferă de cel cu sume finite ! Au existat mii de formule greșite, chiar și la mari matematicieni, de derivări false de serii de funcții etc.

III. MATEMATICA vs. FIZICA

Subiectul este vast, cu un istoric bogat, cu sinuozități și fațete diferite ale aceleiași realități. După ce Gauss a fundamentat Teoria suprafețelor, Riemann a dezvoltat teoria integralelor (unificând diversele cazuri speciale) și a extins Analiza matematică la cazul varietăților diferențiabile și la studiul funcțiilor complexe. Pe de altă parte, Faraday, Maxwell și Hertz stabiliseră ecuațiile câmpului electromagnetic, ceea ce a oferit un subiect vast pentru multe generații de fizicieni și matematicieni (care au precedat apariția marilor bombe tehnologice – Radio, TV, celularele și altele, care au schimbat fața lumii).

Apariția Geometriei neeuclidiene (Gauss, Lobacevski, Bolyai) și a Calculului tensorial au dat fizicii matematica de care avea nevoie. Au contat enorm experimentul Michelson și cel care a dovedit că razele de lumină se curbează în prezența maselor materiale. Razele de lumină erau prototipul liniilor drepte și faimoasa „axiomă a 5-a a lui Euclid" era respinsă de natură. Acum știm că Universul nu este euclidian, iar GPS–ul, Radar–ul etc. folosesc tocmai Geometria neeuclidiană.

Contribuțiile lui Poincaré (teoria haosului), J. von Neumann (bazele matematice ale Mecanicii cuantice), Radon și Cormack (tomografia), Gabor (holografia), ultimele premii Nobel etc. reprezintă alte pagini de aur ale mariajului dintre Matematică și Fizică.

Revistele de Fizică actuale oferă subiecte matematice dintre cele mai importante și stimulative.

IV. MATEMATICA DISCRETĂ vs. INFORMATICA

La începutul secolului 20, odată cu lămurirea paradoxurilor apărute în utilizarea necontrolată a Teoriei mulțimilor (declanșată de Cantor, Zermelo, Hilbert, Gödel), a fost disecat însuși conceptul de calcul, care în asociere cu dezvoltarea Electronicii și Fizicii laserilor, a condus la crearea computerelor moderne (J. von Neumann, Turing, Shannon). Fără a intra în detalii, menționăm : dezvoltarea studiului inteligenței artificiale (vs. prostia naturală), studiul roboților (≡ computere cu terminale mecanice), calculul cuantic, calculul cu membrane (acad. Gh. Păun) și multe alte minunății cu care suntem contemporani. „Hard" - ul și „Soft" - ul sunt fațete ale aceleiași realități. Goethe spunea că „Arhitectura este muzică înghețată". Tot astfel, se poate spune că „Informatica este matematică lichefiată"!

4. Despre matematicieni

Există multe legende, multe preconcepții și etichetări. Adevărul este că aproape toți matematicienii pe care i-am întâlnit în viață sunt persoane normale, cu pasiuni, simpatii și antipatii, preocupări extra-matematice și poziționări politice corecte pe care și le argumentează fără echivoc.

Am remarcat că există patru categorii distincte de matematicieni, aproape disjuncte, imuabile : cei care au atât idei cât și tehnică de realizare (genii de tipul Descartes, Leibniz, Newton, Gauss, Poincaré, Hilbert, von Neumann, Grothendieck și mulți alții, în diferite grade de afirmare a personalității), cei cu idei, care nu au tehnică (victime ale „pirateriei colegiale"); cu tehnică, fără idei (cei care populează conferințele internaționale, congresele ca participanți nu ca invitați) și cei „fără – fără" care constituie imensa majoritate (dispuși la compromisuri politice, bârfe, căsătorii sau divorțuri din interes, suficiență). Cei menționați din prima categorie au marcat epoca; se poate vorbi de matematica până la Gauss și după, până la Hilbert sau Grothendieck și după etc.

Unii matematicieni au fost la bază ingineri; de exemplu, Cauchy, Laurent, Poincaré, Heaviside. Alții au fost juriști (Fermat, Leibniz, Weierstrass), filologi (Grassmann), sau de meserie fără (Ramanujan). Cei mai mulți au fost profesori de matematică la diverse universități. Inadmisibil de mulți au fost și au rămas săraci : Abel, Fourier, Riemann, Heaviside).

Au existat și există matematiciene de mare forță creatoare – Sophie Germain, Sofia Kovalevskaia, Emmy Noether, Ingrid Daubechies ș.a. Dna Daubechies este profesoară belgiană, de curând primind titlul de baroneasă de la regele Albert II ; este printre fondatorii Teoriei undinelor și amprentelor vocale ale tuturor oamenilor (visul lui Stalin, așa cum povestește Soljenițân în romanul „ Primul cerc ").

După 1880, România a avut mulți profesori remarcabili și specialiști într-un domeniu sau altul. Se spune că un geniu matematic apare la 50 de milioane de oameni, nu de dolari investiți. Nu avem clasamente, căci repede am ajunge la întrebări de tipul : „ce este mai important : metrul sau kilogramul ?". Din discuții informale, cu colegi autorizați de propria lor operă, există opinia că D. Pompeiu, S. Stoilow, D. Barbilian, C. Ionescu – Tucea, D. Voiculescu, C. Foiaș, V.M.Popov (inginer automatist, autor al unui criteriu de hiperstabilitate), A. Bejan (autor al teoriei constructalismului) au cea mai înaltă cotă internațională, dar există mulți specialiști matematicieni de origină română cu rezultate excepționale, mai puțin cunoscuți și excesiv de tăcuți, într-o societate debusolată, în care valorile sunt atribuite fără a fi obiectiv măsurate .Nu ascundem nici șovinismul de mare putere.

Matematica se practică la câteva niveluri distincte :

- ca disciplină de învățământ (inclusiv ca sperietoare, din cauza unor profesori lipsiți de responsabilitate și har, care își acceptă senin și probabil profitabil înfrângerea; ce să mai vorbim de efortul esențial de a-și instrui elevii <u>să înțeleagă</u> cele predate ?!);

- ca domeniu de cercetare științifică;

- ca un mijloc comod de selecție;

-ca participant activ în colective largi de ingineri, fizicieni, medici sau economiști, dar mai ales în țările avansate (de curând, s-a lansat un program vast de colaborare - STEM, în care matematicii îi revine un loc de onoare, alături de știință, educație și inginerie).

Principiile generatoare ale matematicii, care o fac deplin frecventabilă, decurg din descrierile și aplicațiile ei spectaculoase ; e.g. număr redus de obiecte esențiale, refugiu pentru cei izolați, puternic interiorizați, critici analitici; nu în ultimul rând, faptul că oferă un limbaj științific universal („latina vremii"), prin care comunică mulți învățați ai vremii. Așa cum spunea Wittgenstein, „matematica face ca adeseori din lucruri care nu îi aparțin, să se obțină alte lucruri care nu îi aparțin". Nu degeaba

MATEMATICA ESTE ȘI UN FAPT DE CULTURĂ !