<u>Relatare din … „Paradisul Fourier”</u>

„Întâlniri cu Stănășilă” - 26 mai 2017

Liviu Jalbă, Octavian Stănășilă

<u>§1. Expunere de motive</u>

Titlul este insolit conform DEX, paradisul este „loc de desfătare pentru oameni liberi”. Pentru noi este un pretext de abordare a trei direcții:

a) o clasă de concepte și rezultate care s-au dezvoltat în timp, în peste 200 de ani, începând cu 1800. Au început matematicienii (1800-1870): Laplace, Fourier, Lagrange, Poisson, Riemann, Weierstrass, Cantor. Apoi fizicienii (1870-1900): Maxwell, Hertz, Lord Kelvin, Planck și inginerii electrici, care au descoperit și inventat, după 1900, multe tehnologii ce pot fi numite generic „tehnologii Fourier” în Comunicații, Radio, TV, Holografie și, recent, tomografie, RMN, spectroscopie, optică Fourier, telefonie celulară, muzica electronică.

b) un fir roșu în istoria ideilor majore care traversează epocile și marchează ceea ce numim Filozofia științei. Nu este o virtute să te lipsești de aceste idei și să aplici pseudo-dictonul: „ceea ce nu știu este neimportant!”.

Iată câteva dintre cele mai importante astfel de idei:

- descompunerea unei entități în elemente primare (de exemplu, a semnalelor periodice în armonici$\equiv$sinusoide);

- considerarea diverselor concepte din unghiuri diferite de vedere (numite <u>reprezentări</u>), ca resurse de dezvoltare a unui domeniu sau altul de cercetare;

- unificarea diverselor temperamente, reprezentând Matematica, Fizica, Ingineria, fiecare fiind invitat (dacă nu chiar obiectiv constrâns!) să asimileze rezultatele celorlalte.

c) comunicarea drept caracteristică a oricărei activități umane, începând cu observarea numărului imens de aplicații tehnologice impresionante, care ne-au îmbogățit viața, ne-au înfrumusețat-o și ne-au securizat-o, în lupta cu mediul tot mai ostil în care trăim.

Învățământul are datoria să preia, desigur selectiv și întârziat, diverse achiziții în timp ale semenilor noștri. În orice caz, este inadmisibil ca seriile Fourier și transformarea Fourier să nu figureze în toate planurile curriculare ale tuturor facultăților, nu doar ale celor tehnice. Nu în ultimul rând, câteva elemente de „cancan istoric”, legate de personalitatea lui Fourier, fascinantă prin ea însăși.

S-o luăm pe rând…

§2. Pilonii paradisului Fourier

Aceștia sunt: seriile Fourier, transformarea Fourier, transformarea Fourier discretă și aplicațiile, fiecare având o componentă culturală înalt semnificativă.

I. Seriile Fourier

Dacă $f(t)$ este o funcție periodică de perioadă $T>0$, cu anumite condiții matematice, atunci are loc o descompunere de forma

$$f(t)=\sum_{n\in\mathbb{Z}} \mathrm{c}_n e^{in\omega t} \tag{1}$$

pentru orice $t\in\mathbb{R}$ ($\omega=\dfrac{2\pi}{T}$, $f(t)=\dfrac{f(t-0)+f(t+0)}{2}$), unde coeficienții (c_n), $n\in\mathbb{Z}$ sunt dați prin formula

$$c_n=\frac{1}{T}\int_0^T f(t)e^{-in\omega t}dt\,. \tag{2}$$

<u>Interpretări fizico-informatice</u>

Așadar, orice semnal periodic (undă, sunet, voce, zgomot, etc.) este o suprapunere de semnale standard, anume semnale sinusoidale. În practică, datorită convergenței din seria (1) se rețin, cu aproximație controlabilă, doar un număr finit de termeni, acești termeni fiind unii intensiv studiați - sinusoide (căci $e^{ix}=\cos x+i\sin x$ pentru orice x). În natură, există multe fenomene periodice (nu numai în timp) - rotația Pământului în jurul axei, revoluția planetelor în jurul Soarelui, bătăile inimii, vibrațiile muzicale ale aerului, curentul electric, diversele ceasornice, oscilatori atomici. Dar relațiile (1) și (2) ascund un fenomen informatic de care am devenit conștienți doar în ultimii 50 de ani, numit <u>conversia analogic-digitală</u> (A/D), sau într-un alt limbaj, legătura între entități continue și entități discrete. Semnalele de tipul (1) sunt entități continuale ($\equiv$ analogice), definite pe intervale, iar coeficienții c_n, calculați în $(\mathbb{Z})$, sunt entități digitale (numere complexe, depinzând de valorile $n=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots$ luate pe „sărite”). Șirul (c_n), $n\in\mathbb{Z}$ constituie <u>spectrul discret</u> al lui $f(t)$, și prin (1), cunoscând (c_n) se reface semnalul $f(t)$ la orice moment. Formula (1) face parte dintr-o clasă largă de rezultate științifice - descompunerea unor entități în elemente mai simple, temă filozofică de care vorbea și Descartes; în Fizică, Matematică, Biologie, Chimie există multe descompuneri similare.

<u>Exemple</u>:

- descompunerea luminii în spectrul de culori (Newton);

- descompunerea numerelor întregi în factori primi și a polinoamelor ca produs de polinoame ireductibile;

- descompunerea Fourier a semnalelor periodice în armonici, extinsă la semnale audio-video;

- descompunerea oricăror semnale în voci (prin intermediul unor „wavelets”-undine);

- descompunerea textelor în fraze, a frazelor în propoziții, a propozițiilor în cuvinte, a cuvintelor în foneme etc.

II. Transformarea Fourier

Oricărei funcții $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, astfel încât $\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|dt<\infty$, i se poate asocia o nouă funcție $\hat{f}:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ prin formula

$$\hat{f}(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt \quad (\omega\in\mathbb{R}). \tag{3}$$

Ca limbaj matematic, asocierile număr$\to$număr se numesc funcții și cele funcție$\to$funcție se numesc operatori. Asocierea $f(t)\mapsto\hat{f}(\omega)$ este numită <u>operatorul Fourier</u> (sau <u>transformarea Fourier</u>). Pentru un student, funcția $\hat{f}(\omega)$ este definită ca „o integrală improprie cu parametru”, care sperie… Așa cum spunea un hâtru, formula (3) amintește de reacția lui Dracula în fața unei cruci! Fourier a stabilit (neriguros) următoarea formulă de inversare:

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(\omega)e^{it\omega}d\omega,\ \forall t\in\mathbb{R}. \tag{4}$$

Se mai scrie: $\hat{f}(\omega)=F\{f(t)\}$ și $f(t)=F^{-1}\{\hat{f}(\omega)\}$.

<u>Atenție</u>: Demonstrația riguroasă, acceptată de comunitatea matematicienilor (inclusiv a celor cârcotași!), a durat 70 de ani în cazul formulei (1) și 90 de ani în cazul formulei (4). Interpretările informatice au venit după alți 40 de ani (prin N. Wiener, Cl. Shannon, I. von Neumann, W. Heisenberg). Fizicienii Maxwell, Hertz, Lord Kelvin au acceptat formula (4) și fără asigurarea rigorii.

<u>Interpretări fizico-informatice</u>

Orice semnal în timp $f(t)$ are <u>spectrul frecvențial</u> $\hat{f}(\omega)$; se arată că $\hat{f}(\omega)$ tinde către zero pentru $|\omega|\to\infty$.

Relațiile (3), (4), stabilesc o corespondență bijectivă (1-1) între două domenii fundamentale ale existenței: TIMP și FRECVENȚĂ. Să explicăm acest lucru.

O idee centrală în matematică (și nu numai) este cea de <u>reprezentare</u>, unde același concept este privit din mai multe puncte de vedere.

Exemple:

1) Numerele reale reprezentate ca fracții zecimale infinite sau ca puncte pe o axă sau alta;

2) Numerele complexe reprezentate algebric, trigonometric, exponențial sau ca puncte în planul lui Gauss;

3) Vectorii reprezentați ca „țepe”, ca segmente orientate sau ca seturi de numere (relativ la un reper);

4) Reprezentarea cuvintelor sau imaginilor ca șiruri de biți;

5) Reprezentări ale porților logice prin matrice etc.

Ca și numerele sau vectorii, tot astfel, semnalele $f(t)$ sunt obiecte având un caracter absolut, adică sunt independente de vreun reper sau mod de reprezentare, cu condiția asigurării unei descrieri corecte și inversabile (1-1). Prin formula (3), semnalului $f(t)$ i se asociază o reprezentare în frecvență $\hat{f}(\omega)$, cu posibilitatea de restabilire prin formula (4) de inversare.

Notă: Semnalul este același, doar reprezentarea este alta! Acest fapt a avut un impact teribil, care a schimbat fața lumii… Pe la 1900 au fost inventate microfonul și difuzorul; în esență, ele realizează „transfourierea”, adică transformă un semnal în timp $f(t)$ (de exemplu, un semnal vocal sau muzical) într-un semnal $\hat{f}(\omega)$ care poate fi realizat ca undă electromagnetică prin operatorul F și invers (prin F^{-1}). Bineînțeles, Fourier nu avea habar de așa ceva și acesta este un mister al creației și continuității umane… Să ne imaginăm cum arăta comunicarea interumană înainte de 1850 (poștă cu cai, focuri, steaguri, porumbei, …).

Să comparăm cu următoarea schemă a comunicării prin Radio (cu viteza luminii!):

$$\text{EMITENT } f(t) \xrightarrow{F} \hat{f}(\omega) \rightarrow \text{CANAL DE COMUNICAȚIE} \rightarrow \simeq \hat{f}(\omega) \xrightarrow{F^{-1}} f(t) \text{RECEPȚIE}$$

Celularele funcționează pe aceeași schemă, Televiziunea aplică transformarea Fourier 2D, iar Tomografia este o compunere de transformări Fourier 1D, 2D etc.

Ce să mai vrem de la o idee și de la un geniu colectiv?

III. Transformarea Fourier discretă (TFD)

Acesta este al treilea pilon al paradisului Fourier.

Mult timp, transformarea Fourier a însemnat manipulare de integrale complicate, care făceau deliciul unor aleși și supliciul multor foști studenți. În era calculatoarelor moderne, după 1970, s-a trecut la „dizolvarea” integralelor de tipul (3) sau (4), în succesiuni de operații algebrice, în număr finit, efectuate asupra șirurilor de date rezultate din eșantionarea ($\equiv$discretizarea) semnalelor $f(t)$, sub rezerva unor calcule aproximative, cu erori controlate.

„Nu contează câte date, în număr finit să fie!”

Se alege un întreg $N \geq 2$ (de regulă o putere a lui 2) și se notează cu S_N mulțimea semnalelor discrete de lungime N. Orice semnal $f(t)$ se poate „sparge” în seturi de date de lungime N, de tipul (x_n), $0 \leq n \leq N-1$. Considerând matricea $N \times N$, $W = (v^{kn})$, $0 \leq k,\ n \leq N-1$, unde $v = e^{-\frac{2\pi i}{N}} = \cos\frac{2\pi}{N} - i\sin\frac{2\pi}{N}$, se asociază oricare $X = (x_n) \in S_n$ șirului de date $F = (f_k)$, $0 \leq k \leq N-1$, unde $f_k = \sum_{n=0}^{N-1} v^{kn} \cdot x_n$. Se obține astfel <u>transformarea Fourier discretă</u>, $TFD : S_N \to S_N$, $X \mapsto F$, care asociază oricărui vector-coloană $X = (x_0, x_1, ..., x_{N-1})^T$, vectorul coloană $F = (f_0, f_1, ..., f_{N-1})^T$, unde $F = W \cdot X \equiv TFD(X)$, cu inversarea: $X = \frac{1}{N}\overline{W} \cdot F$.

Uneori, sumele se calculează mai greu decât integralele. Dar, în acest caz, americanii Cooley și Tukey au elaborat în 1965 un algoritm, acum celebru, numit FFT („Fast Fourier Transform”). S-a descoperit ulterior că Gauss descoperise în 1807 același algoritm, dar cu aplicații în teoria numerelor și rămas necunoscut. Pentru a avea o idee asupra eficienței algoritmului FFT, pentru $N = 2^{12}$, calculul (direct, pe calculator!) al TFD necesita 1,7 s, și doar 10 ms prin FFT, iar pentru $N = 2^{20}$, calculul direct ia 30 ore și cel prin FFT, 4s, în ipoteza că se realizează 10^7 operații/s.

TFD se aplică în mod curent pentru a calcula dezvoltări în serie Fourier (de tipul (1)+(2)), pentru a rezolva diverse ecuații ale Fizicii matematice; recent, TFD a fost adaptat și pentru calcule cuantice.

<u>Notă:</u> O curbă de mare semnificație este <u>clopotul lui Gauss</u> ($f(t) = e^{-t^2}$), legat de teoria limită centrală din Teoria probabilităților. Clopotul lui Gauss este, între altele, un vector propriu al operatorului Fourier.

IV. Florilegiul de aplicații

Fără a intra în detalii tehnice, menționăm că seriile Fourier domină studiul oscilațiilor și al unor ecuații ale Fizicii matematice (ecuația difuziei, ecuația coardei vibrante etc), Radio$\equiv F_1$, TV$\equiv F_2$, Tomografia$\equiv F_2 \cdot (F_1^{-1})$, Spectroscopia Fourier, Optica Fourier, muzica electronică, recunoașterea vocii, calculul cuantic etc.

§3. Personalitatea lui Jean Baptiste Fourier (1768-1830)

În primul rând, el este întemeietorul Fizicii matematice, alături de Euler, Lagrange și Laplace.

Copil sărac, rămas orfan de ambii părinți, a fost crescut și educat la o școală a ordinului benedictin. Talent neobișnuit la matematică, dar și rebel, a ajuns să fie arestat și dus în fața ghilotinei în 1794, dar a scăpat în ultimă instanță. În 1798, Napoleon l-a numit guvernator al Egiptului pentru a-l scăpa de critici și dușmani; matematicienii vremii îl acuzau de lipsă de rigoare, iar politicienii nu îi iertau păcatele. În Egipt a lucrat matematică și, simultan, a devenit un pasionat egiptolog; la întoarcere, Napoleon l-a numit prefect la Grenoble, acolo unde a urmărit cu succes realizarea unui drum larg, devenit mai târziu autostrada Grenoble-Torino. În 1807 a scris cartea sa fundamentală „Théorie analytique de la chaleur", unde își expune teoria seriilor și transformării integrale care îi poartă numele. Totodată, descoperă „efectul de seră" și stabilește „legea propagării căldurii" („Fluxul de căldură este proporțional cu gradientul temperaturii"), într-o vreme când conceptele teoretice nu erau stabilizate. Manuscrisul acestei cărți a fost depus în 1807 și a zăcut la Academia franceză până în 1822, în lipsa unor referate favorabile (invidie, ignoranță, indiferență - aceleași trei „i-uri" care au măcinat multe spirite inventive neînțelese!).

Cu puțin înainte de moarte a devenit baron și academician, după ce mulți savanți francezi și englezi foloseau cu succes aplicativ teoremele sale (încă nedemonstrate și respinse de Juriu!). O revistă celebră poartă numele: „Analele Institutului Fourier" cu sediul în Grenoble. Posteritatea l-a răsplătit copios, deși Victor Hugo l-a confundat cu filozoful socialist Ch. Fourier. Academicianul francez Jean Dieudonné a afirmat că „după numele lui Iisus Christos, cel mai întâlnit nume, în literatura științifică și religioasă, este cel al lui J.P. Fourier".

<u>Câteva învățăminte</u>

- Sintagmele continuu/discret, timp/frecvență sunt categorii filozofice;

- Predarea seriilor Fourier, Transformarea Fourier, tehnologiile declanșate pot însemna practicarea unei matematici vii.

- Lui Fourier îi aparțin următoarele cuvinte profetice:

„Matematica reprezintă forța spiritului uman, chemat să ne recompenseze pentru imperfecțiunea simțurilor și pentru durata redusă a vieții noastre."

Bibliografie:

L. Jalbă, G. Mănoiu, O. Stănășilă - „Paradisul Fourier", Floarea Darurilor, 2017.