

# Tomografie matematică

(Autor: Eleodor Bistriceanu)

Tomografie computerizată  $\equiv$  tomografie matematică

## 1. Problema tomografiei computerizate

Problema tomografiei computerizate poate fi formulată astfel:

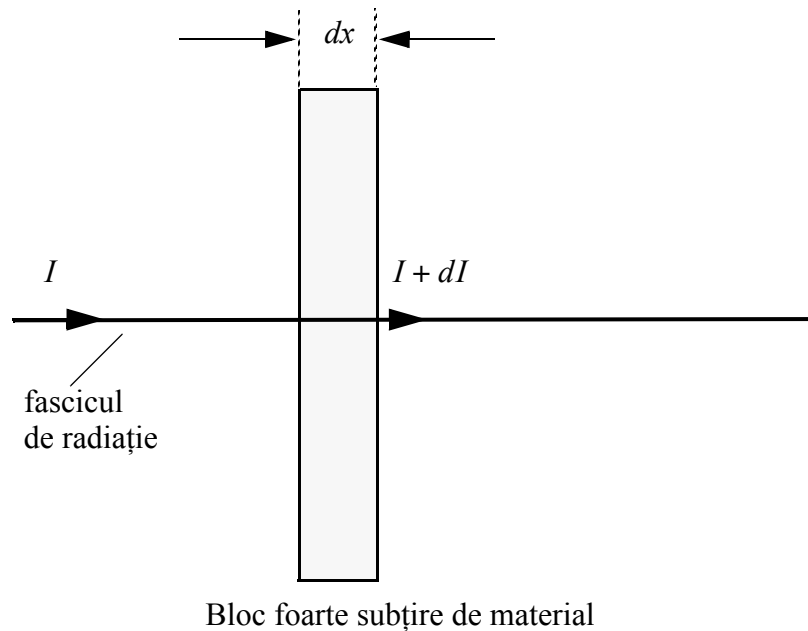
**Să se vizualizeze secțiunile unui corp opac, fără a-l secționa (fără a-l desface în părți componente).**

Această formulare este foarte generală și, ca urmare, are un anumit grad de neclaritate. Într-adevăr, care sunt datele problemei tomografiei, adică ce anume se presupune a fi cunoscut? Enunțul general precedent nu conține ipotezele problemei.

De aceea, problema pare a fi una foarte complicată. Avem, într-adevăr, libertatea de a ne alege ce ipoteze dorim. Dar ne ajută acest lucru? Sau mai rău ne încurcă, fiindcă nu avem nici un punct de sprijin?

Vom reveni la enunțarea problemei tomografiei computerizate după ce vom discuta legea lui Lambert, un rezultat important preluat din fizică, mai exact din teoria undelor electromagnetice.

## 2. Legea lui Lambert



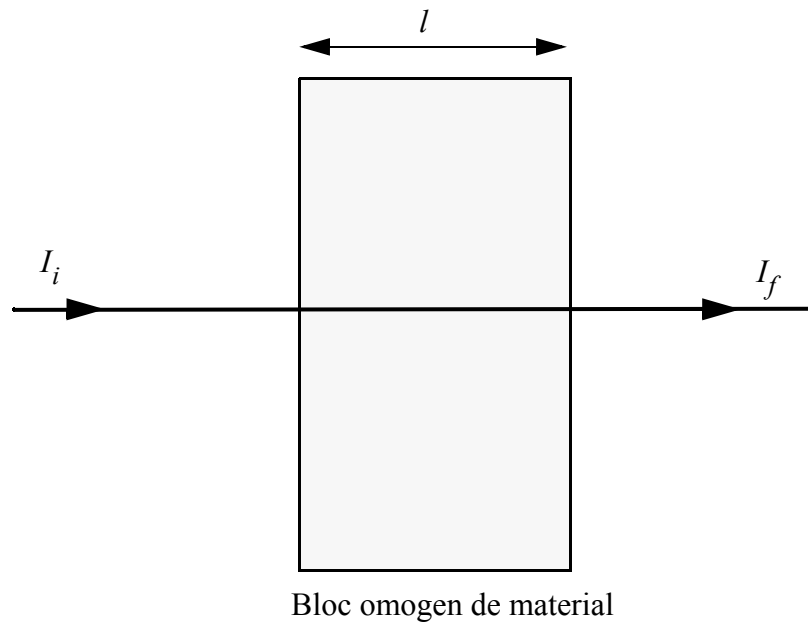
La trecerea printr-un bloc subțire de material omogen, descreșterea  $dI$  a intensității este proporțională cu grosimea  $dx$  a blocului și cu intensitatea inițială (la intrarea în bloc),  $I$ :

$$dI = -\alpha I dx$$

**(Legea lui Lambert - secolul XVIII (1760))**

$I$  = intensitatea fascicului la intrarea în material

$\alpha$  = coeficientul de absorbție (pozitiv)



$$I_f = I_i e^{-\alpha l}$$

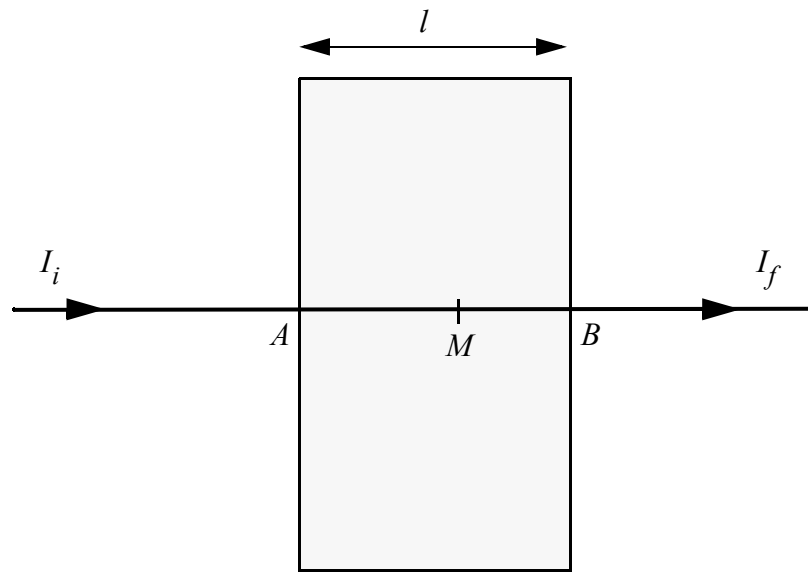
**(Legea lui Lambert sau Lambert-Beer)**

$I_i$  = intensitatea fasciculului la intrarea în material

$I_f$  = intensitatea fasciculului la ieșirea din material

$l$  = grosimea blocului

$\alpha$  = coeficientul de absorbție

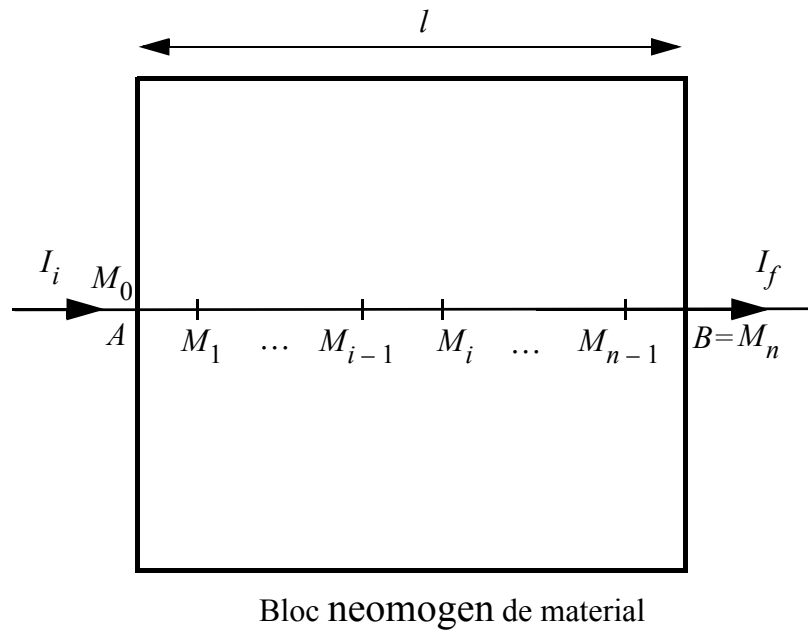


Bloc **neomogen** de material

$$I_f = I_i e^{-\int_{AB} f(M) dl}$$

**(Legea lui Lambert - cazul general)**

$f(M)$  =coeficientul de absorbtie al corpului în punctul  $M$



$$\int_{AB} f(M) dl \approx \sum_{i=1}^n f(M_{i-1}) M_{i-1} M_i$$

$f(M)$  = coeficientul de absorbtie în punctul  $M$   
 $M_{i-1} M_i$  = lungimea segmentului  $M_{i-1} M_i$ .

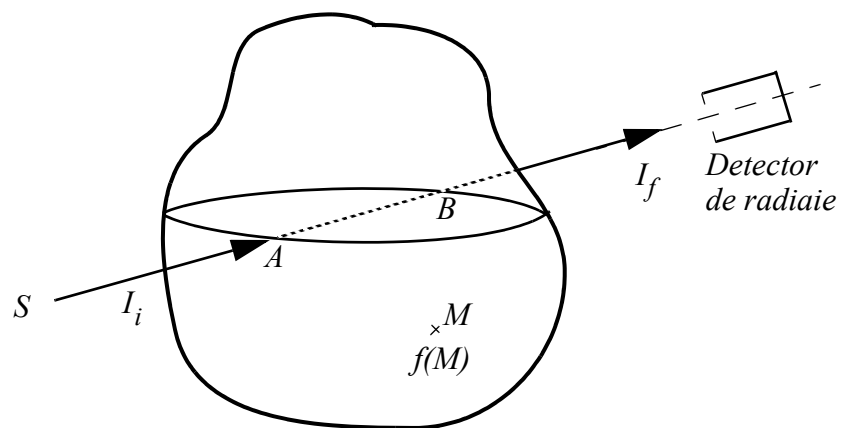
$$I_f = I_i e^{-\int_{AB} f(M) dl}$$

$$\ln \frac{I_i}{I_f} = \int_{AB} f(M) dl$$

Intensitățile fasciculului de radiație la intrarea, respectiv ieșirea din corp (adică  $I_i$  și, respectiv  $I_f$ ) pot fi măsurate cu ajutorul detectorilor de radiație. (Mai exact, se lucrează cu o sursă de radiație care emite tot timpul un fascicul de radiație de intensitate cunoscută  $I_i$ , rămânând să fie măsurată doar intensitatea fasciculului la ieșirea din corp).

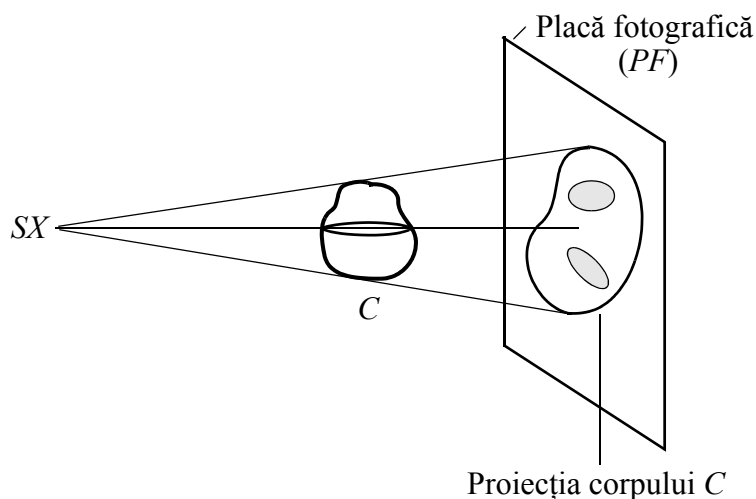
Rezultă că legea lui Lambert ne oferă mijlocul prin care

**putem afla integralele curbilinii de prima speță ale coeficientului de absorbție  $f$  al unui corp neomogen, pe o familie oarecare de drepte care străbat acest corp.**



$$\int_{AB} f(M) dl \approx \ln \frac{I_i}{I_f}$$

$f(M)$  = coeficientul de absorbție a radiației în punctul  $M$  al corpului

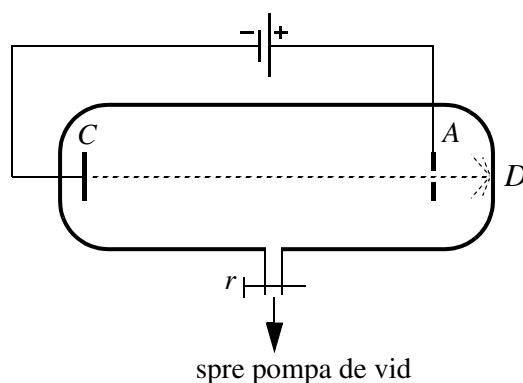


În figura precedentă este reprezentat un corp  $C$  neomogen, care este plasat între o sursă de radiație  $X$ ,  $SX$ , și o placă fotografică,  $PF$ . Imaginea obținută pe placa fotografică după dezvoltare se numește **proiecție** a corpului  $C$  și aceasta depinde de poziția sursei de radiație față de corp.

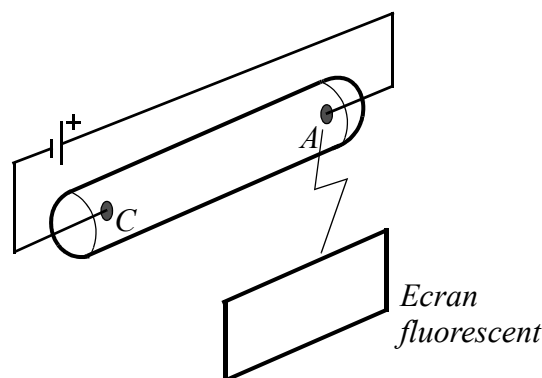
Din gradul de înnegrire al plăcii fotografice se poate afla intensitatea fasciculului care lovește placa (cu cât placa este mai neagră într-un punct, cu atât fasciculul care a lovit acel punct a fost mai intens). Ca urmare, din analiza plăcii fotografice se pot afla intensitățile fasciculului emergent din corp după anumite direcții. Folosind legea lui Lambert discutată mai înainte, se pot afla integralele curbilinii de prima speță ale coeficientului de absorbție a corpului analizat  $C$  corespunzătoare unei întregi familii de drepte care străbat (intersectează) corpul.



Radiația X a fost descoperită de către Roentgen în anul 1895. Lucrând cu un tub Crookes învelit în carton negru, savantul german obține întâmplător, pe un ecran fluorescent din vecinătatea tubului (și din afara acestuia), licăriri atunci când în tub avea loc o descărcare electrică (atunci când electrozii tubului erau conectați la o sursă de tensiune de mii-zeci de mii de volți).



Când anodul *A* are un orificiu, se constată că peretele de sticlă al tubului Geissler (numit și tub Crookes) devine fluorescent în jurul punctului *D*.



Din acest moment Roentgen are sentimentul că a descoperit un nou tip de radiație. Investigând gradul de penetrare a noii radiații descoperite de el însuși, Roentgen va pune între tubul Crookes și ecranul fluorescent o plăcuță de plumb, ocazie cu care va observa - cu infinită uimire - scheletul mâinii sale pe ecran.

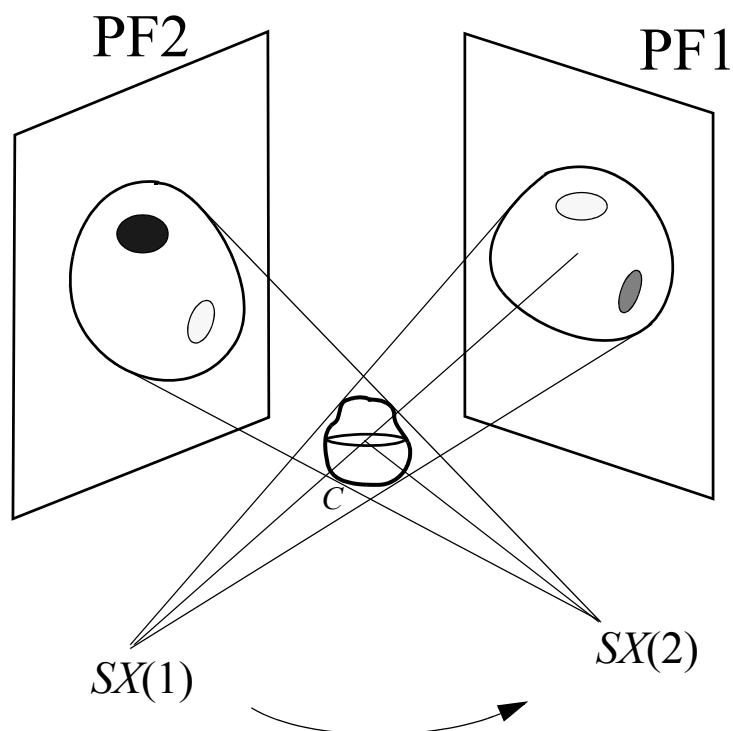


Radiografia mâinii soției lui Roentgen - prima radiografie din lume. [Sursa: Wikipedia]

Radiația gamma a fost descoperită de către Becquerel în anul 1896.

Imediat după aceste două descoperiri fundamentale, diagnosticarea cu radiație Roentgen sau gamma a devenit comună în medicină.

### 3. Reformularea problemei tomografiei



În figura precedentă sunt reprezentate proiecțiile corpului analizat  $C$ , pentru două poziționări diferite ale sursei de radiații  $X$ ,  $SX$ , față de corpul  $C$ . În cazul general, cele două proiecții sunt, în mod natural, diferite, tot la fel cum un om arată diferit dacă este fotografiat din poziții diferite.

Având în vedere cele discutate mai înainte, suntem acum în măsură să dăm un enunț precis (nu este singurul posibil) al problemei tomografiei:

**Să se vizualizeze secțiunile unui corp tridimensional opac atunci când se cunosc toate proiecțiile sale obținute prin rotirea sursei de radiație (X sau gamma) în jurul unui punct fix, într-un plan orizontal.**

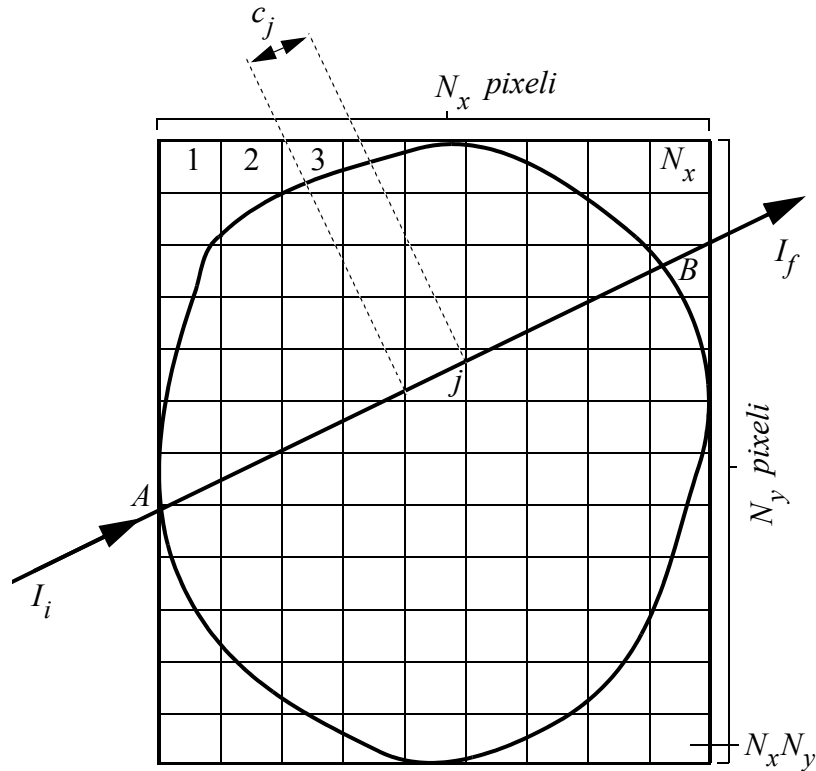
Aceasta este problema teoretică. Deoarece în practică nu putem să lucrăm cu un număr infinit de proiecții, problema tomografiei se poate enunța astfel:

să se vizualizeze secțiunile unui corp tridimensional opac atunci când se cunosc un număr finit de proiecții ale sale, obținut prin rotirea sursei de radiații (X sau gamma) în jurul unui punct fix, într-un plan orizontal.

După cum am văzut mai sus, analiza plăcilor fotografice pe care sunt imprimare proiecțiile ne conduce la aflarea integralelor curbilinii de prima speță a coeficientului de absorbție pe diferite drepte care străbat corpul. A vizualiza o secțiune înseamnă a afla coeficientul de absorbție în toate punctele secțiunii respective. Vizualizarea se poate face asociind fiecărui punct o culoare, asocierea fiind la bunul plac al cercetătorului.

Problema tomografiei se mai numește **problema reconstrucției obiectelor tridimensionale din proiecțiile lor.**

#### 4. Un prim mod de abordare a problemei tomografiei computerizate



$f_j$  = coeficientul de absorbție în interiorul pixelului  $j$ .

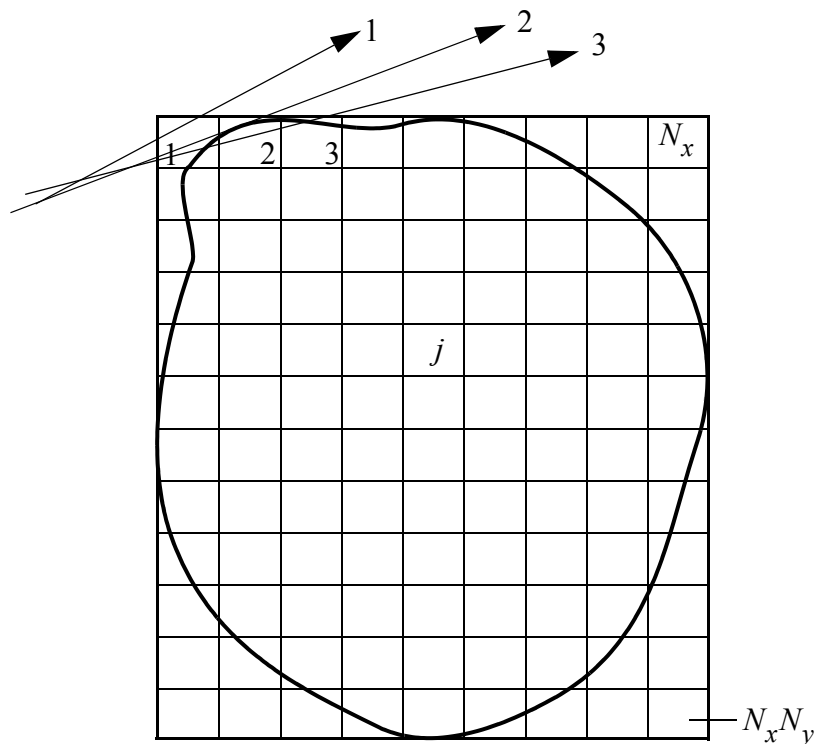
$$\ln \frac{I_i}{I_f} = \int_{AB} f(M) dl \approx \sum_{j=1}^{N_x N_y} f_j c_j$$

$$\sum_{j=1}^{N_x N_y} c_j f_j = \ln \frac{I_i}{I_f}$$

Pentru fiecare poziție a fasciculului emis de sursa de radiație, obținem o ecuație liniară de forma precedentă, în care necunoscutele sunt  $f_1, f_2, \dots, f_{N_x N_y}$ . Coeficienții  $c_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, N_x N_y$  depind de poziția fasciculului de radiație și pot fi determinați din geometria figurii.

Problema tomografiei este redusă astfel la rezolvarea unui sistem de ecuații liniare de dimensiuni uriașe.

Pentru a ne da seama de dificultatea problemei, să admitem că secțiunea de examinat are diametrul de 10 cm și că ea a fost încadrată într-un pătrat, care a fost apoi descompus în pixeli de forma unor mici pătrate cu latura de 1 mm. Atunci vom avea de rezolvat un sistem de ecuații liniare cu 10 000 de necunoscute (pentru că  $N_x = N_y = 100$ ). Avem nevoie de cel puțin tot atâtea poziții ale fasciculului de radiație - fiecare dintre aceste poziții determină o ecuație, coeficienții  $c_j$  fiind determinați de poziția fasciculului față de secțiunea considerată. Astfel, în cazul concret considerat, problema tomografiei se reduce la rezolvarea unui sistem de ecuații cu 10 000 de ecuații și cu tot atâtea necunoscute.



$$(1) c_1 f_1 = a_1 \Rightarrow f_1$$

$$(2) c_1' f_1 + c_2' f_2 = a_2 \Rightarrow f_2$$

$$(3) c_1'' f_1 + c_2'' f_2 + c_3'' = a_2 \Rightarrow f_3$$

Metoda aceasta de determinare succesivă a coeficienților de absorbție nu funcționează din cauza **acumulării erorilor**.

Pentru rezolvarea sistemelor de ecuații care apar în tomografia computerizată pot fi folosite metode iterative. Primul tomograf computerizat comercial a fost realizat de către inginerul britanic Hounsfield în anul 1971, fapt pentru care el a fost distins cu premiul Nobel pentru Medicină în anul 1979 - premiu împărțit cu fizicianul sud-african Alan Cormack. Aparatul lui Hounsfield folosea o metodă iterativă.



Godfrey N. Hounsfield - inginer britanic, laureat Nobel în 1979, pentru medicină și fiziologie

[Sursa: [http://www.nobelprize.org/nobel\\_prizes/medicine/laureates/1979/hounsfield-bio.html](http://www.nobelprize.org/nobel_prizes/medicine/laureates/1979/hounsfield-bio.html)]



Alan M. Cormack - fizician sud-african, laureat Nobel în 1979, pentru medicină și fiziologie

[Sursa: [http://www.nobelprize.org/nobel\\_prizes/medicine/laureates/1979/cormack-bio.html](http://www.nobelprize.org/nobel_prizes/medicine/laureates/1979/cormack-bio.html)]





*J. Radon*

**Johann Radon** (1887-1956) [Sursa foto: Wikipedia]-marele nedreptățit - a creat teoria matematică ce stă la baza tomografiei computerizate în anul 1917, depășindu-și timpul cu o jumătate de secol. Probabil că Radon ar fi spus că s-a ocupat de respectiva problemă pur și simplu pentru “onoarea spiritului uman” (Jacobi).



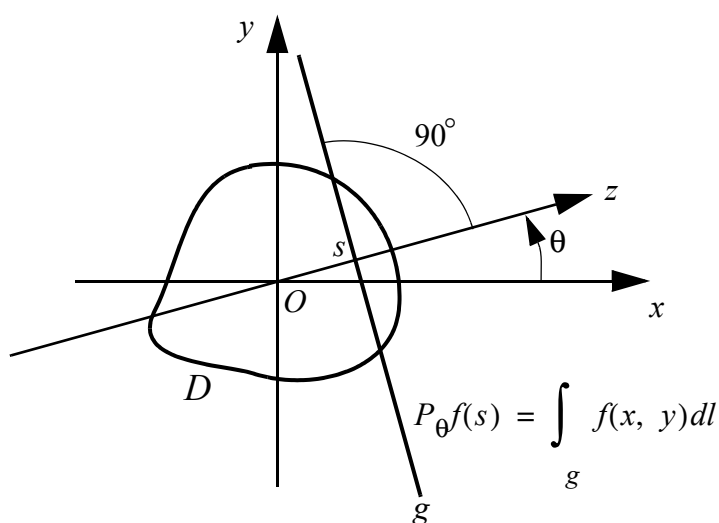
**Rosalind Franklin** (1920-1958) [Sursa: Wikipedia] - o altă mare nedreptățită

O strălucită cercetătoare care a făcut posibilă descifrarea structurii moleculei de ADN, prin muncă experimentală de pionierat (a realizat o fotografie cheie a moleculei, care sugera structura spațială elicoidală). Totuși, nu a primit Premiul Nobel - luat de colegii ei Watson, Crick și Wilkins - fiindcă acest premiu nu se acordă niciodată post-mortem. Fundamentalul ei articol apare în același număr al revistei *Nature* în care apare și articolul lui Watson și Crick, referitor la structura dublu-elicoidală a moleculei de ADN. Rezultatul obținut de Watson și Crick se baza în mod fundamental pe fotografia realizată de Franklin, pe care cei doi - foarte tineri pe atunci - reușiseră să o obțină fără ca Franklin să știe. (A se vedea *Elicea vieții*, de Watson).

## 5. Abordarea problemei tomografiei prin aparatul Fourier

Există o abordare matematică a problemei tomografiei mult mai subtilă decât cea precedentă, abordare care implică aparatul matematic al **analizei Fourier**.

Considerăm o secțiune  $D$  a unui corp tridimensional opac, raportată la un sistem de axe ortogonale  $xOy$ . Notăm cu  $f(x, y)$  valoarea coeficientului de absorbție al corpului în punctul de coordonate  $(x, y)$ . Secțiunea  $D$  poate fi asimilată cu o felie foarte subțire obținută din corpul tridimensional cu ajutorul a două plane paralele și foarte apropiate unul de celălalt. Cum aerul absoarbe foarte puțin radiația X sau gamma, putem considera că funcția  $f$  este nulă în afara secțiunii  $D$ .



Considerăm o axă  $Oz$  în planul  $xOy$ , care face un unghi  $\theta$  cu axa  $Ox$ . Unghiul  $\theta$  descrie intervalul  $[0, \pi)$ . Considerăm, de asemenea, o dreaptă  $g$  perpendiculară pe axa  $Oz$ , care intersectează această axă ( $Oz$ ) într-un punct de abscisă  $s$ .

Notăm cu  $P_\theta f(s)$  integrala curbilinie de prima speță a coeficientului de absorbție  $f = f(x, y)$  pe dreapta  $g$ , adică

$$P_\theta f(s) = \int_g f(x, y) dl.$$

Făcând pe  $s$  să varieze de la  $-\infty$  la  $\infty$ , obținem o funcție reală de variabilă reală

$$s \rightarrow P_\theta f(s),$$

care se numește **proiecția paralelă** de unghi  $\theta$  a funcției  $f$ .

Se observă că proiecția paralelă de unghi  $\theta$  a coeficientului de absorbție poate fi estimată folosind legea lui Lambert, o sursă de radiație de intensitate cunoscută și detectoare de radiație.

**Problema tomografiei** poate fi enunțată astfel:

**să se afle funcția  $f$ , adică coeficientul de absorbție în punctele secțiunii  $D$  considerate, în ipoteza că se cunosc toate proiecțiile sale paralele, adică funcțiile  $P_\theta f$ , pentru toate unghiurile  $\theta$  din intervalul  $[0, \pi)$ .**

**Teorema proiecției:**

$$(\Psi P_\theta f)(\omega) = (\Psi_2 f)(\omega \cos \theta, \omega \sin \theta),$$

pentru orice  $\omega \in (-\infty, \infty)$ ,  $\theta \in [0, \pi)$ .

Aici  $\Psi P_\theta f$  reprezintă transformata Fourier unidimensională a funcției proiecție  $P_\theta f$ , iar  $\Psi_2 f$  reprezintă transformata Fourier bidimensională a funcției de două variabile  $f = f(x, y)$ .

Teorema proiecției ne arată că dacă știm proiecțiile paralele ale coeficientului de absorbție  $f = f(x, y)$ , adică dacă știm

funcțiile  $P_\theta f$  pentru  $\theta \in [0, \pi)$ , atunci putem afla valorile transformatei Fourier bidimensionale a lui  $f$ ,  $\Psi_2 f$ , în toate punctele planului. Folosind apoi formula de inversiune ( $f = \Psi_2^{-1}(\Psi_2 f)$ , unde  $\Psi_2^{-1} h$  reprezintă transformata Fourier inversă a funcției  $h$ ), vom putea afla funcția necunoscută  $f$ .

Se poate arăta că

$$f(x, y) = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^\pi \left( \int_{-\infty}^{\infty} (\Psi P_\theta f)(R) |R| e^{iR(x \cos \theta + y \sin \theta)} dR \right) d\theta$$

unde  $(\Psi P_\theta f)$  reprezintă transformata Fourier a funcției  $P_\theta f$ .

Rezolvarea problemei tomografiei computerizate prin utilizarea formulei precedente poartă numele de **metoda Fourier**.

Menționăm că se poate face o simplificare masivă a formulei precedente folosind proprietățile convoluției. Se ajunge astfel la o metodă mult mai performantă numită **metoda convoluției**.

Menționăm, de asemenea, că implementarea metodelor menționate mai sus este în sine dificilă, ridicând nu numai probleme practice (programare, complexitatea calculului), ci și probleme teoretice interesante și profunde în sine (transformarea Fourier discretă, transformata Fourier rapidă, construcții de filtre, rejectia erorilor, etc.).

## **6. Problema tomografiei - problemă interdisciplinară**

1) **Legea lui Lambert** (secolul XVIII, 1760), dedusă inițial pentru fasciculele de lumină vizibilă.

2) **Descoperirea radiațiilor Roentgen (1895) și a radiațiilor gamma (Becquerel, 1896)** - radiații capabile să penetreze corpul uman. Extinderea legii lui Lambert la noul tip de radiații.

3) **Aparatul matematic inițiat de Fourier** (1768-1830) (analiza Fourier - secolele XVIII-XIX). Aparatul Fourier este astăzi folosit într-o multitudine de aplicații - electronică, mecanică cuantică, acustică, tomografie, etc.

4) **Dezvoltarea tehnicii de calcul** (secolul XX), fără de care complexitatea computațională a problemelor puse de tomografie ar fi fost imposibil de abordat. Aportul fundamental, copleșitor, adus în domeniul calculatoarelor de **electronică**, știință apărută la începutul secolului XX, cu o dezvoltare impetuoasă, exponențială.

5) **Presiunea permanentă a sistemului medical** pentru o diagnosticare din ce în ce mai puțin afecată de erori.

Ne confruntăm aici cu o situație cu care matematicienii sunt deja obișnuiți: timpul lung după care anumite rezultate matematice abstracte pot fi folosite în practică, în aplicații strălucitoare. Așa că problema aplicabilității unui anumit aparat matematic în practică este o falsă problemă. Rezultate care cândva păreau a fi creații pur abstracte ale spiritului matematic,

apărute din simpla curiozitate și putere de pătrundere a spiritului uman (obținute pentru “**onoarea spiritului uman**” (Jacobi)), s-au dovedit a fi de mare ajutor într-o mulțime de aplicații ale științei moderne. Așa este cazul multor teoreme din teoria numerelor, care și-au găsit aplicații foarte frumoase în **criptarea și decriptarea datelor**.

Celebra afirmație a matematicianului și filosofului englez Bertrand Russel:

**“Matematica este acea știință în care nu știm niciodată despre ce vorbim, iar matematicienii sunt acei oameni care nu știu niciodată dacă ceea ce spun este adevărat sau fals.”**

Își confirmă pe zi ce trece adevărul. Fiindcă a ști despre ce vorbești implică, printre altele, a înțelege consecințele. Dar iată că aceste consecințe, materializate în minunate aplicații practice, în echipamente uimitoare, etc. devin posibile abia după zeci sau chiar sute de ani de la descoperirea unor teoreme matematice fundamentale care stau la baza lor.

Tocmai această **interdisciplinaritate** - care este o caracteristică fundamentală a prezentului și care reclamă eforturi mari din partea cercetătorilor - conferă acestuia, prezentului, proprietăți cu totul noi față de trecut. Este ceea ce biologia înțelege prin **principiul integralității**: întregul capătă proprietăți cu totul noi în raport cu părțile sale componente. Punând la un loc informații preluate din domenii cu totul diferite ale științei - fizică, matematică, electronică, biologie, medicină, etc.- prezentul a făcut posibile realizări la care în urmă cu câteva decade nu ar fi visat nimeni, cum ar fi, de exemplu, **vizualizarea spațială a organelor corpului uman**, cu rotiri în jurul a diferite axe și puncte.

## Bibliografie

Bistriceanu Eleodor, *Principiile matematice și fizice ale tomografiei computerizate*, Editura Matrix, București, 1996.

Cormack A.M. (laureat Nobel), *Representation of a Function by Its Line Integrals, with Some Radiological Applications I*, Journal of Applied Physics, vol. 34, nr. 9, sept. 1963, p. 2722-2727.

Cormack A.M., *Representation of a Function by Its Line Integrals, with Some Radiological Applications II*, Journal of Applied Physics, vol. 35, nr. 10, oct. 1964, p. 2908-2913.

Cormack A.M., *Early Tomography and Related Topics, Mathematical Aspects of Computerized Tomography*, Proceedings, Oberwolfach, Febr. 10-16, 1980. Editori: G.T. Herman și F. Natterer (Seria *Lecture Notes in Medical Informatics*, editori D.A.B. Lindberg și P.L. Reichertz, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York.

Crowther R.A., de Rosier D.J., Klug A., *The Reconstruction of a Three Dimensional Structure from Projections and Its Applications to Electron Microscopy*, Proceedings of the Royal Society of London, A. 317, p. 319-340, 1970

Gardner N.T., Herman G.T., *Algorithms for Reproducing Objects from Their X-Ray Projections*, Computer Graphics and Image Processing, 1972, 1, p. 97-106.

Radon Johann, *Über die Bestimmung von Funktionen durch ihre Integralwerte längs gewisser Mannigfaltigkeiten*, Berichte Sächsische Akad. Wissenschaft (Leipzig), Math. Phys. Klass 69 (1917), p. 262-271.

Ramachandran G.N., Lakshminarayanan A.V., *Three Dimensional Reconstruction from Radiographs and Electron Micrographs: Application of Convolutions Instead of Fourier Transforms*, Proceedings of the National Academy of Science U.S.A., Vol. 68, Nr. 9, p. 2236-2240, sept. 1971.

Schroedinger, Erwin (laureat Nobel), *Spirit și materie*, Editura politică, București 1980.

Schroedinger, Erwin, *Ce este viața?* Editura politică, București 1980.

Shepp L.A., Krushkall J.B., *Computerized Tomography – The New Medical X-Ray Technology*, American Mathematical Monthly, vol. 85, p. 420-439, 1978.

Smith K.T., Solomon D.C., Wagner S.L., *Practical and Mathematical Aspects of The Problem of Reconstructing Objects from Their Radiographs*, Bulletin of the American Mathematical Society, vol. 83, No. 6, p. 1227-1270, nov. 1977.

Steen L.A., Malkevitch J. ș.a. – *Introduction to Contemporary Mathematics*, W.H. Freeman and Company, New York, 1988.



Watson J.D. (laureat Nobel), *Elicea vieții (o relatare personală asupra descoperirii structurii ADN-ului)*, Editura științifică, București, 1970.

